

2. Решаване на системи линейни уравнения – приближени методи

2.1. Метод на последователните приближения

Това е итерационен метод. Тук точното решение може да се получи като граница на редица от последователни приближения. Нека е дадена СЛАУ

$$(1) \quad Ax = b, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

и $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ - търсеното решение (корен).

Системата (1) може да се модифицира по следния начин:

$$Ax = b \Leftrightarrow 0 = -Ax + b \Leftrightarrow x = x - Ax + b \Leftrightarrow x = (E - A)x + b \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad \boxed{x = Bx + b}, \quad B = E - A = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

Формула (2) индуцира итерационния процес

$$(3) \quad x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b, \quad k = 1, 2, \dots$$

или в разгънат вид

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^{(k)} = b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{22}x_2^{(k-1)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k-1)} + b_{n2}x_2^{(k-1)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k-1)} + b_n \end{array}, \quad k = 1, 2, \dots}$$

откъдето се получава редицата от вектори

$$(4) \quad x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$$

От теорията е известно, че редицата (4) ще бъде сходяща към корена x^* за **произволно** начално приближение $x^{(0)}$, ако която и да е норма на матрицата B е по-малка от 1, т.е. ако е изпълнено **поне** едно от следните неравенства:

$$(5) \quad \text{а) } \|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1, \quad \text{б) } \|B\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1, \quad \text{в) } \|B\|_4 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 < 1.$$

За близостта на приближеното решение $x^{(k)}$ към точното решение x^* е в сила неравенството

$$(6) \quad \|x^* - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \left(\|x^{(0)}\| + \frac{\|b\|}{1 - \|B\|} \right).$$

Чрез тази формула може да се намери **min** брой итерации k , за да се постигне желаната от нас точност ε . За тази цел е достатъчно да се реши следното неравенство относно k :

$$(7) \quad \|B\|^k \left(\|x^{(0)}\| + \frac{\|b\|}{1 - \|B\|} \right) < \varepsilon.$$

Алгоритъм

1. Построяване на матрицата $B = E - A$,
2. Проверка за сходимост чрез формули (5),
3. Намиране на **min** брой итерации чрез формула (7),
4. Изпълнение на получения брой итерации по формули (3).

Точките 3. и 4. могат да бъдат заменени с т.н. стоп-критерий:

Ако $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon$, то $x^* = x^{(k)}$ с точност ε .

В координатен вид:

Ако $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, за $\forall i = \overline{1, n}$ то $x_i^* = x_i^{(k)}$ с точност ε .

Пример. По метода на последователните приближения решете системата като направите шест итерации и работите с точност $\varepsilon = 10^{-6}$. За начално приближение изберете нулевия вектор, т.е. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} x_1 + 0,2x_2 - 0,1x_3 = 1,5 \\ -0,1x_1 + 1,1x_2 - 0,15x_3 = -1,75 \\ -0,05x_1 + 0,2x_2 + 0,9x_3 = 2,4 \end{cases}$$

Решение:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & +0,2 & -0,1 \\ -0,1 & +1,1 & -0,15 \\ -0,05 & +0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \rightarrow B = E - A = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 & 0,15 \\ 0,05 & -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Проверка за сходимост:

$$\sum_{j=1}^3 |b_{1j}| = |0| + |-0,2| + |0,1| = 0,3; \quad \sum_{j=1}^3 |b_{2j}| = |0,1| + |-0,1| + |0,15| = 0,35;$$

$$\sum_{j=1}^3 |b_{3j}| = |0,05| + |-0,2| + |0,1| = 0,35, \text{ т.е. } \|B\|_1 = \max\{0,3; 0,35; 0,35\} = 0,35 < 1.$$

4. Итерациите пресмятаме по формула (3’):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & -0,2x_2^{(k)} & +0,1x_3^{(k)} & +1,5 \\ x_2^{(k+1)} = & 0,1x_1^{(k)} & -0,1x_2^{(k)} & +0,15x_3^{(k)} & -1,75 \\ x_3^{(k+1)} = & 0,05x_1^{(k)} & -0,2x_2^{(k)} & +0,1x_3^{(k)} & +2,4 \end{cases}$$

При $k=0$ имаме:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = & -0,2x_2^{(0)} & +0,1x_3^{(0)} & +1,5 & = & -0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 1,5 = 1,5 \\ x_2^{(1)} = & 0,1x_1^{(0)} & -0,1x_2^{(0)} & +0,15x_3^{(0)} & -1,75 & = 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0 - 1,75 = -1,75 \rightarrow \\ x_3^{(1)} = & 0,05x_1^{(0)} & -0,2x_2^{(0)} & +0,1x_3^{(0)} & +2,4 & = 0,05 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 + 2,4 = 2,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,5 \\ x_2^{(1)} = -1,75 \\ x_3^{(1)} = 2,4 \end{cases}.$$

За втората итерация заместваме тези получени стойности във формулата за $k=1$ и намираме:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = & -0,2x_2^{(1)} & +0,1x_3^{(1)} & +1,5 & = -0,2 \cdot (-1,75) + 0,1 \cdot 2,4 + 1,5 = 2,09 \\ x_2^{(2)} = & 0,1x_1^{(1)} & -0,1x_2^{(1)} & +0,15x_3^{(1)} & -1,75 & = 0,1 \cdot 1,5 - 0,1 \cdot (-1,75) + 0,15 \cdot 2,4 - 1,75 = -1,065 \rightarrow \\ x_3^{(2)} = & 0,05x_1^{(1)} & -0,2x_2^{(1)} & +0,1x_3^{(1)} & +2,4 & = 0,05 \cdot 1,5 - 0,2 \cdot (-1,75) + 0,1 \cdot 2,4 + 2,4 = 3,065 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 2,09 \\ x_2^{(2)} = -1,065 \\ x_3^{(2)} = 3,065 \end{cases}.$$

Следващите четири итерации направете самостоятелно. Резултатите, закръглени до шестия знак след десетичната запетая, са нанесени в таблица 1. По стоп-критерия може да се заключи, че при $k=6$ се получава точност малко под 0,001. Тази сравнително добра скорост на сходимост произтича от нормата на матрицата $\|B\|_1 = 0,35$.

Таблица 1

$k \backslash x^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1,5	-1,75	2,4
2	2,09	-1,065	3,065
3	2,0195	-0,97475	3,024
4	1,99735	-0,996975	2,998325
5	1,999228	-1,000819	2,999095
6	2,000073	-1,000131	3,000033
...
x^*	2,000000	-1,000000	3,000000

Колко итерации ще са достатъчни за изчисляване на решението на същата система с точност $\varepsilon = 10^{-5}$ в първа норма?

Решение: Тук ще приложим точка [3] от алгоритъма. Имаме $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, откъдето

$$\|x^{(0)}\|_1 = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(0)}| = 0. \text{ Също така } b = (1,5; -1,75; 2,4)^T \text{ или } \|b\|_1 = 2,4 \text{ и } \|B\|_1 = 0,35.$$

Решаваме относно k неравенството (7) за първа норма

$$\|B\|_1^k \left(\|x^{(0)}\|_1 + \frac{\|b\|_1}{1 - \|B\|_1} \right) < \varepsilon$$

$$\text{Имаме: } (0,35)^k \left(0 + \frac{2,4}{1 - 0,35} \right) < 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad (0,35)^k \cdot \frac{2,4}{0,65} < 10^{-5} \quad \Leftrightarrow$$

$$(0,35)^k < 10^{-5} \cdot \frac{0,65}{2,4} \mid \lg \quad \Leftrightarrow \quad k \lg 0,35 < -5,5673 \mid : \lg 0,35 \quad \Leftrightarrow$$

$$k > \frac{-5,5673}{-0,4559} \approx 12,21.$$

Избираме $k=13$.

Подготовка на СЛАУ за прилагане на метода на последователните приближения, когато матрицата на системата е положително определена

$$(8) \quad Ax = b, \quad x^* - \text{корен} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda Ax = \lambda b, \quad \lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x - \lambda Ax + \lambda b \quad \Leftrightarrow$$

$$(9) \quad \boxed{x = (E - \lambda A)x + \lambda b},$$

Нека матрицата A е **положително определена** и ν е коя да е нейна норма. Ако изберем $\lambda = 2/\rho$, където $\rho > \nu$, то уравнението (9) ще изглежда така:

$$(10) \quad x = \left(E - \frac{2}{\rho} A \right) x + \frac{2}{\rho} b$$

В този случай формула (10) индуцира итерационния процес

$$(11) \quad x^{(k)} = \left(E - \frac{2}{\rho} A \right) x^{(k-1)} + \frac{2}{\rho} b, \quad k = 1, 2, \dots,$$

който е сходящ към решението x^* на системата (8).

Обърнете внимание, че в този случай не е необходимо да се проверяват достатъчни условия (ДУ) за сходимост на матрицата $(E - \frac{2}{\rho} A)$.

Алгоритъм

- [1.] Построяване на матрицата $E - \frac{2}{\rho} A$ и вектора $\frac{2}{\rho} b$.
- [2.] Изпълнение на итерационния процес (11) до достигане на желаната от нас точност ε чрез стоп-критерия:

Ако $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$, за $\forall i = \overline{1, n}$ то $x_i^* = x_i^{(k)}$ с точност ε .

Пример. За системата по-долу е известно, че матрицата ѝ е положително определена. Подгответе системата за решаването ѝ чрез формула (11). Направете три итерации при $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 12 \\ 3x_1 + 10x_2 + 6x_3 = -8 \\ 6x_2 + 13x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$[1.] \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \|A\|_1 = 19 \rightarrow \text{Избираме } \rho = 20 \ (\rho > \nu).$$

Следователно:

$$\lambda = \frac{2}{\rho} = \frac{2}{20} = 0,1 \rightarrow E - \frac{2}{\rho} A = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 0 & -0,6 \\ 0 & -0,6 & -0,3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{\rho} b = \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,8 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Изпълнение на три итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,1x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 1,2 = 0,1 \cdot 0 - 0,3 \cdot 0 + 1,2 = 1,2 \\ x_2^{(1)} = -0,3x_1^{(0)} - 0,6x_3^{(0)} - 0,8 = -0,3 \cdot 0 - 0,6 \cdot 0 - 0,8 = -0,8 \\ x_3^{(1)} = -0,6x_2^{(0)} - 0,3x_3^{(0)} + 0,1 = -0,6 \cdot 0 - 0,3 \cdot 0 + 0,1 = 0,1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 1,2 \\ x_2^{(1)} = -0,8 \\ x_3^{(1)} = 0,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,1x_1^{(1)} - 0,3x_2^{(1)} + 1,2 = 0,1 \cdot 1,2 - 0,3 \cdot (-0,8) + 1,2 = 1,56 \\ x_2^{(2)} = -0,3x_1^{(1)} - 0,6x_3^{(1)} - 0,8 = -0,3 \cdot 1,2 - 0,6 \cdot 0,1 - 0,8 = -1,22 \\ x_3^{(2)} = -0,6x_2^{(1)} - 0,3x_3^{(1)} + 0,1 = -0,6 \cdot (-0,8) - 0,3 \cdot 0,1 + 0,1 = 0,55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 1,56 \\ x_2^{(2)} = -1,22 \\ x_3^{(2)} = 0,55 \end{cases}.$$

Третата итерация направете самостоятелно. Резултатите са нанесени в таблицата.

$k \backslash x^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1,2	-0,8	0,1
2	1,56	-1,22	0,55
3	1,722	-1,598	0,667
.....
x^*	2	-2	1

Коментар. Видно е, че имаме голям избор за ρ ($\rho > \nu$) и оттук за $\lambda = 2/\rho$. Тогава възниква въпросът има ли начин да изберем такова ρ , щото формула (11) да работи най-добре. За съжаление на този въпрос все още няма отговор.

2.2. Метод на простата итерация (Якоби)

Нека е дадена СЛАУ

$$(1) \quad Ax = b, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

и $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ - търсеното решение (корен).

Системата (1) може да се модифицира:

$$(2) \quad Ax = b \quad \leftrightarrow \quad \boxed{x = Cx + d}, \quad C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}, \quad d_i = b_i / a_{ii}, \quad a_{ii} \neq 0 \quad \text{за } \forall i = \overline{1, n}.$$

Чрез формула (2) може да се конструира следният итерационен процес:

$$(3) \quad x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d, \quad k = 1, 2, \dots$$

или в разгънат вид

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = & c_{12}x_2^{(k-1)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k-1)} + d_1 \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k-1)} + & \dots + c_{2n}x_n^{(k-1)} + d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k-1)} + c_{n2}x_2^{(k-1)} + \dots & + d_n \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

откъдето се получава редицата от вектори

$$(4) \quad [x^{(0)}], x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$$

Редицата (4) ще бъде сходяща към корена x^* за всяко $x^{(0)}$, ако е изпълнено **поне** едно от следните неравенства:

$$(5) \quad \text{а) } \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{б) } \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \text{в) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 < 1.$$

За близостта на приближеното решение $x^{(k)}$ към точното решение x^* е валидна оценката:

$$(6) \quad \|x^* - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \left(\|x^{(0)}\| + \frac{\|d\|}{1 - \|C\|} \right)$$

Чрез тази формула може да се намери **min** брой итерации k , за да се постигне желаната от нас точност ε . За тази цел е достатъчно да се реши следното неравенство относно k :

$$(7) \quad \|C\|^k \left(\|x^{(0)}\| + \frac{\|d\|}{1 - \|C\|} \right) < \varepsilon.$$

ВНИМАНИЕ!

Методът на простата итерация е особено подходящ когато главният диагонал на матрицата A е доминиращ, т.е.

$$|a_{ii}| \gg \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Алгоритъм

1. Построяване на матрицата C ,
2. Проверка за сходимост чрез формули (5),
3. Намиране на **min** брой итерации за постигане на зададената точност ε чрез формула (7),
4. Изпълнение на получения брой итерации (чрез формули (3)).

Коментар. Точките 3 и 4 могат да бъдат заменени с т.н. стоп-критерий:

Ако $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon$, то $x^* = x^{(k)}$ с точност ε .

В координатен вид:

Ако $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, за $\forall i = \overline{1, n}$ то $x_i^* = x_i^{(k)}$ с точност ε .

Пример. За системата дадена по-долу направете пет итерации чрез метода на Якоби. Работете с междинна точност от шест знака след десетичната запетая, като за начално приближение изберете нулевия вектор $x^{(0)} = (0,0,0)$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ -x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow d = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

2. Проверка за сходимост:

$$\sum_{j=1}^3 |c_{1j}| = |0| + |0,25| + |0| = 0,25 < 1, \quad \sum_{j=1}^3 |c_{2j}| = |0,25| + |0| + |0,25| = 0,5 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^3 |c_{3j}| = |0| + |0,25| + |0| = 0,25 < 1.$$

4. Изпълнение на пет итерации по формули (3), които тук имат вида:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & 0,25x_2^{(k)} & + 0,5 \\ x_2^{(k+1)} = & 0,25x_1^{(k)} & + 0,25x_3^{(k)} & + 1,5 \\ x_3^{(k+1)} = & 0,25x_2^{(k)} & + 0,5 \end{cases}.$$

Първа итерация:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,25x_2^{(0)} + 0,5 = 0,25 \cdot 0 + 0,5 = 0,5 \\ x_2^{(1)} = 0,25x_1^{(0)} + 0,25x_3^{(0)} + 1,5 = 0,25 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 + 1,5 = 1,5 \\ x_3^{(1)} = 0,25x_2^{(0)} + 0,5 = 0,25 \cdot 0 + 0,5 = 0,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 0,5 \\ x_2^{(1)} = 1,5 \\ x_3^{(1)} = 0,5 \end{cases}$$

Втора итерация:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,25x_2^{(1)} + 0,5 = 0,25 \cdot 1,5 + 0,5 = 0,875 \\ x_2^{(2)} = 0,25x_1^{(1)} + 0,25x_3^{(1)} + 1,5 = 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 + 1,5 = 1,75 \\ x_3^{(2)} = 0,25x_2^{(1)} + 0,5 = 0,25 \cdot 1,5 + 0,5 = 0,875 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 0,875 \\ x_2^{(2)} = 1,75 \\ x_3^{(2)} = 0,875 \end{cases}.$$

Останалите итерации направете самостоятелно. Резултатите са нанесени в табл. 2.

Таблица 2

$k \backslash x^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0,5	1,5	0,5
2	0,875	1,75	0,875
3	0,9375	1,9375	0,9375
4	0,984375	1,96875	0,984375
5	0,992188	1,992188	0,992188
...
x^*	1	2	1

Колко итерации ще са достатъчни за изчисляване на решението на същата система с точност $\varepsilon = 10^{-5}$ с втора норма?

Решение:

Тук ще приложим точка [3] от алгоритъма. Имаме $x^{(0)} = (0,0,0)^T \rightarrow \|x^{(0)}\|_2 = 0$.

Също така $d = (0,5,1,5,0,5)^T \rightarrow \|d\|_2 = 2,5$; $\|C\|_2 = 0,5$.

Решаваме относно k неравенството

$$\|C\|_2^k \left(\|x^{(0)}\|_2 + \frac{\|d\|_2}{1 - \|C\|_2} \right) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$(0,5)^k \left(0 + \frac{2,5}{1 - 0,5} \right) < 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad (0,5)^k \cdot 5 < 10^{-5} \quad | \lg \quad \Leftrightarrow$$

$$k \lg 0,5 + \lg 5 < -5 \quad | : \lg 0,5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{-5 - \lg 5}{\lg 0,5} \approx 18,93.$$

Избираме $k = 19$.

Коментар. Ако диагоналните елементи на матрицата A са само единици, то методът на последователните приближения и методът на Якоби стават едно и също нещо.

2.3. Метод на Зайдел

Методът на Зайдел е една модификация на итерационните методи от типа на метода на последователните приближения и метода на простата итерация (Якоби).

Схема на Зайдел за метода на последователните приближения:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots$$

или в разгънат (координатен) вид

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = b_{11}x_1^{(k-1)} + b_{12}x_2^{(k-1)} + b_{13}x_3^{(k-1)} + \dots + b_{1n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + b_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k-1)} + b_{23}x_3^{(k-1)} + \dots + b_{2n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + b_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ x_3^{(k)} = b_{31}x_1^{(k)} + b_{32}x_2^{(k)} + b_{33}x_3^{(k-1)} + \dots + b_{3n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + b_{3n}x_n^{(k-1)} + b_3, \quad k = 1, 2, \dots \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + b_{n3}x_3^{(k)} + \dots + b_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_{nn}x_n^{(k-1)} + b_n \end{cases}$$

Схема на Зайдел за метода на простата итерация:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots$$

В този случай координатният вид е аналогичен на горния. Изобщо и в двата метода модификацията на Зайдел се подчинява на следната схема за намиране на k -то приближение:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(k-1)} & , & x_2^{(k-1)} & , & x_3^{(k-1)} & , \dots , & x_{n-1}^{(k-1)} & , & x_n^{(k-1)} & \rightarrow & x_1^{(k)} \\ \boxed{x_1^{(k)}} & , & x_2^{(k-1)} & , & x_3^{(k-1)} & , \dots , & x_{n-1}^{(k-1)} & , & x_n^{(k-1)} & \rightarrow & x_2^{(k)} \\ \boxed{x_1^{(k)}} & , & \boxed{x_2^{(k)}} & , & x_3^{(k-1)} & , \dots , & x_{n-1}^{(k-1)} & , & x_n^{(k-1)} & \rightarrow & x_3^{(k)} \\ \dots\dots\dots & & & & & & & & & & \\ \boxed{x_1^{(k)}} & , & \boxed{x_2^{(k)}} & , & \boxed{x_3^{(k)}} & , \dots , & \boxed{x_{n-1}^{(k)}} & , & x_n^{(k-1)} & \rightarrow & x_n^{(k)} \end{array}$$

Условията за сходимост на метода на последователните приближения и метода на Якоби са **достатъчни условия (ДУ)** за сходимост на модификацията на Зайдел. В повечето случаи модификацията на Зайдел е по-бързо сходяща, но не в порядък.

Модификацията на Зайдел може да е сходяща и когато методите на последователните приближения и Якоби не са сходящи.

Пример. За дадената система приложете модификацията на Зайдел за метода на Якоби. Работете с междинна точност от шест знака след десетичната запетая, като за начално приближение изберете нулевия вектор. Направете шест итерации.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ -x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow d = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$

2. Проверка за сходимост – направена (виж предната тема).

4. Изпълнение на шест итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,25x_2^{(0)} + 0,5 = 0,25 \cdot 0 + 0,5 = 0,5 \\ x_2^{(1)} = 0,25x_1^{(1)} + 0,25x_3^{(0)} + 1,5 = 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0 + 1,5 = 1,625 \\ x_3^{(1)} = 0,25x_2^{(1)} + 0,5 = 0,25 \cdot 1,625 + 0,5 = 0,90625 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 0,5 \\ x_2^{(1)} = 1,625 \\ x_3^{(1)} = 0,90625 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,25x_2^{(1)} + 0,5 = 0,25 \cdot (1,625) + 0,5 = 0,90625 \\ x_2^{(2)} = 0,25x_1^{(2)} + 0,25x_3^{(1)} + 1,5 = 0,25 \cdot (0,90625) + 0,25 \cdot (0,90625) + 1,5 = 1,953125 \\ x_3^{(2)} = 0,25x_2^{(2)} + 0,5 = 0,25 \cdot (1,953125) + 0,5 = 0,988281 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 0,90625 \\ x_2^{(2)} = 1,953125 \\ x_3^{(2)} = 0,988281 \end{cases}.$$

Останалите итерации направете самостоятелно. Резултатите са нанесени в дадената таблица. Направете още нещо: сравнете тези резултати с резултатите от таблица 2 и направете вашето заключение.

Таблица 3

$k \backslash x^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0,5	1,625	0,90625
2	0,90625	1,953125	0,988281
3	0,988281	1,994141	0,998535
4	0,998535	1,999268	0,999817
5	0,999817	1,999908	0,999977
6	0,999977	1,999989	0,999997
...
x^*	1	2	1

Задачи за упражнения

1) Да се докаже, че за системата

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10 \end{cases}$$

методът на простата итерация е сходящ. Ако за $x^{(0)}$ се избере стълбът на свободните членове $x^{(0)} = (0, 5, -10, 15)^T$, колко итерации са достатъчни за изчисляване на решението на системата с точност $\varepsilon = 10^{-4}$? Работете във втора матрична и векторна норми.

Упътване: Трябва да разместите последните два реда. Отговор: $k=22$ итерации.

2) По метода на простата итерация да се реши системата с точност $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

Отговор: $(-1,212; 1,162; 0,586)$.

3) Да се реши системата $Ax = b$, където

$$A = \begin{pmatrix} 7,6 & 0,5 & 2,4 \\ 2,2 & 9,1 & 4,4 \\ -1,3 & 0,2 & 5,8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 9,7 \\ -1,4 \end{pmatrix}.$$

по метода на Зайдел с точност $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$. Системата да се преобразува във вид удобен за

итерация $x = Bx + c$, където $B = E - 0,1A$, $c = 0,1b$. Изберете $x^{(0)} = c$.

Отговор: Ако вие работите правилно, ще трябва да получите следните приближения:

$$x^{(0)} = (0,19; 0,97; -0,14),$$

$$x^{(1)} = (0,2207; 1,0703; -0,1915),$$

$$x^{(2)} = (0,2354; 1,0988; -0,2118),$$

$$x^{(3)} = (0,2424; 1,1088; -0,2196),$$

$$x^{(4)} = (0,2425; 1,1124; -0,2226).$$

4) Дадена е системата

$$\begin{cases} x_1 - 0,25x_3 - 0,25x_4 = 0,5 \\ x_2 - 0,25x_3 - 0,25x_4 = 0,5 \\ -0,25x_1 - 0,25x_2 + x_3 = 0,5 \\ -0,25x_1 - 0,25x_2 + x_4 = 0,5 \end{cases}$$

а) Като тръгнете от $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$, направете четири итерации чрез метода на Якоби.

б) Като използвате същия начален вектор, направете четири итерации чрез метода на Зайдел.

в) Кое е точното решение на системата?

5) Дадена е системата $Ax = b$, където

$$A = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,1 & 0,1 \\ 0,15 & 1,1 & -0,05 \\ -0,1 & 0,1 & 1,05 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,20 \\ -1,15 \end{pmatrix}.$$

а) Да се построи итерационен процес от вида $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$, където $B = E - A$.

б) Да се покаже, че итерационният процес е сходящ.

в) Да се намерят минималният брой итерации, гарантиращи точност 10^{-6} при $x^{(0)} = b$ във втора норма.

г) Да се пресметне $x^{(3)}$, като се закръгля до третия знак включително след десетичната запетая.

Отговор: Точното решение е $(1, 0, -1)$.

6) Дадена е система линейни алгебрични уравнения. Решете я чрез подходящо избиране от вас метод и желаната от вас точност.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Отговор: Ориентировъчно при $x^{(0)} = (2, 3, 5)^T$ третата итерация е

$$x^{(3)} = (1,90923; 3,19495; 5,04485).$$

2.4. Още нещо за системите линейни уравнения

Нека x и x^* са съответно точното и изчисленото (приближено) решение на системата $Ax = b$. Съществуват две основни величини, свързани с отклоненията в x^* .

$$x - x^* = e \text{ - грешка ,}$$

$$Ax - Ax^* = b - Ax^* = r \text{ - остатък.}$$

Теорията на матриците ни учи, че ако едната от тези величини е нула, то и другата трябва да бъде нула (A – неособена матрица). **Но от изчислителна гледна точка по-важно е дали, ако едната от величините е “малка”, то и другата също е “малка”. Оказва се, че това не винаги е така.**

Пример. Да се реши системата

$$\begin{cases} 0,780x_1 + 0,563x_2 = 0,217 \\ 0,913x_1 + 0,659x_2 = 0,254 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{pmatrix}.$$

по метода на Гаус с частичен избор на водещ елемент на хипотетичен компютър, който работи с точност три значещи цифри и закръгля чрез отстраняване на младшия разряд [4].

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,780 & 0,563 & 0,217 \\ 0,913 & 0,659 & 0,254 \end{array} \right) \begin{array}{c} \searrow \\ \swarrow \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0,913 & 0,659 & 0,254 \\ 0,780 & 0,563 & 0,217 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{:(0,913)} \\ \leftrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,721 & 0,278 \\ 0,780 & 0,563 & 0,217 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{.(-0,780)} \\ \swarrow \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,721 & 0,278 \\ 0 & 0,001 & 0,001 \end{array} \right) \leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 0,721x_2 = 0,278 \\ 0,001x_2 = 0,001 \end{array} \right| \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = -0,443 \\ x_2 = 1,000 \end{array} \right| \text{ (до три знака)}$$

Следователно изчисленото (приближено) решение е $x^* = \begin{pmatrix} -0,443 \\ 1,000 \end{pmatrix}$. Изчисляваме остатъка

$$r = b - Ax^* = \begin{pmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,443 \\ 1,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,000460 \\ -0,000541 \end{pmatrix}.$$

Компонентите на остатъка са **малки**. Точното решение обаче е $x = \begin{pmatrix} 1,000 \\ -1,000 \end{pmatrix}$, което означава, че грешката $e = x - x^*$ **не е малка**. Тя даже е по-голяма от решението. Защо се получи така? Ако се вгледате в матрицата A ще забележите, че тя е съвсем близо до особената и **не е типична** за повечето практически задачи.

Нека сега върху същата задача да работим с компютър, осигуряващ шест или повече цифри. Резултатът ще изглежда така:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,721796 & 0,278204 \\ 0 & 0,000001 & -0,000001 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 1,00000 \\ x_2 = -1,00000 \end{array} \right|,$$

което е точният отговор.

С една дума, колкото една матрица е по-близо до особената, с толкова по-мощна аритметика (повече значещи цифри) трябва да работим. Изобщо, опитът показва, че:

Елиминирането по метода на Гаус-Жордан с избор на главен елемент гарантира получаването на малки остатъци, но не винаги малки грешки.